Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Први разред – А категорија

1. За природан број n, нека је $f(n)$ број написан истим цифрама али обратним редоследом (тј. здесна налево) ако n није дељив са 10, а иначе дефинишемо $f(n) = 0$. (На пример, $f(123) = 321$ и $f(30) = 0$.)

a) Ако важи $n = 3f(n)$, доказати да је n дељив са 27.

b) Ако важи $n = 2f(n)$, доказати да је n дељив са 9.

2. Нека је тачка K средиште странице CD правоугаоника $ABCD$. Праве BK и AC су ортогоналне и секу се у тачки H, а тачка G је подножје нормале из D на AC. Доказати:

a) $\measuredangle ACB = \measuredangle DHA$;

b) $GH = \dfrac{1}{3}AC$.

3. Математичка комисија се састоји од $2n$ чланова, $n \geqslant 3$. Познато је да је сваки члан комисије у свађи с тачно једним другим чланом комисије (ова релација је симетрична). На колико начина је могуће поделити комисију у три одбора: један за састављање задатака, један за оцењивање задатака и један за организацију такмичења, тако да сваки одбор има бар два члана и да никоја два члана комисије која су у свађи не буду у истом одбору?

4. Сат има три казаљке које се све окрећу равномерном брзином. Секундна казаљка направи круг за један минут, минутна за један сат, а сатна за 12 сати. У поноћ су све казаљке у истој позицији. Колико ће пута у периоду од 24 часа од тада једна казаљка са сваком од друге две заклапати угао од $30°$?

5. Барон Минхаузен живи у земљи Z у којој постоји 2018 градова и неки градови су повезани путевима (путевима је могуће кретати се у оба смера). Барон је установио да постоји град A из ког можемо кренути на путовање, на крају тог путовања се вратити у град A, а да током путовања прођемо свим путевима у тој земљи тачно једном. Он тврди да из те чињенице следи да за било која два пута p и r која иду из истог града постоји путовање из неког града B на крају ког се враћамо у град B, током путовања пролазимо свим путевима тачно једном, и притом путевима p и r пролазимо непосредно једним за другим. Да ли је он праву или по обичају лаже?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Други разред – А категорија

1. Решити једначину:
$$\sqrt{17-7\sin 2x}=3\cos x-5\sin x.$$

2. Дат је $\triangle ABC$ чије су странице a, b и c, $a\leqslant b\leqslant c$, а тежишне дужи које њима одговарају су t_a, t_b и t_c, респективно. Доказати:

a) једнакост $a^2+c^2=2b^2$ важи ако и само ако важи $t_a^2+t_c^2=2t_b^2$;

b) једнакост $a^2+c^2=2b^2$ важи ако и само ако је $\triangle ABC$ сличан троуглу чије су странице дужина t_a, t_b и t_c.

3. Наћи све просте бројеве облика $1010101\ldots0101$ (тј. чији децимални запис се састоји од цифре 1 иза које следи блок „01" поновљен произвољан број пута).

4. Наћи сва ненегативна реална решења $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ система једначина
$$x_{i+1}=x_i^2-(x_{i-1}-1)^2,\quad i=1,2,\ldots,n.$$
(Индексе узимамо циклично по модулу n.)

5. Дат је непаран природан број n. Квадрат странице n је подељен на n^2 јединичних квадрата. Странице ових квадрата одређују укупно $2n(n+1)$ јединичних дужи. Неке од ових дужи су обојене црвено, при чему сваки јединични квадрат има бар две црвене странице. Колико најмање дужи може бити обојено?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Трећи разред – А категорија

1. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(f(xy)) = |x|f(y) + 3f(xy).$$

2. Нека је I центар кружнице уписане у $\triangle ABC$, $AB < AC$. Права AI поново сече његову описану кружницу у тачки D. Кружница описана око $\triangle CDI$ поново сече праву BI у тачки K. Доказати: $BK = CK$.

3. Дат је троугао чије су дужине страница природни бројеви и чија је површина природан број. Једна од његових страница је аритметичка средина друге две, а збир најкраће странице и површине је једнак збиру преостале две странице. Наћи дужине његових страница и његову површину.

4. Дата је табла $(2n+1) \times (2n+1)$ у чијем се ћошку налази паук. Паук у једном потезу може да се помери једно или два поља вертикално или дијагонално, или једно поље хоризонтално. Колико најмање потеза је потребно пауку да обиђе сва поља на табли? (Сматрамо да поље на ком паук стоји на почетку, као и поље на које стигне на крају, јесу поља која је обишао; такође, уколико паук одигра потез у ком се помери за два поља, сматрамо да паук јесте обишао и поље између њих.)

5. Примитивном Питагорином тројком називамо уређену тројку природних бројева (a, b, c), узајамно простих по паровима, за које важи $a^2 + b^2 = c^2$.

a) Доказати да се ниједна примитивна Питагорина тројка не може записати користећи само две различите цифре.

b) Доказати да се бесконачно много примитивних Питагориних тројки може записати помоћу цифара 0, 1 и 5.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Четврти разред – А категорија

1. У зависности од ненегативног параметра k одредити граничну вредност:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} kx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

2. Октаедар $ABCDEF$ има за своју основицу квадрат $ABCD$, док је права EF нормална на раван одређену квадратом $ABCD$ и пролази кроз његов центар. Познато је да лопта која додирује све пљосни октаедра и лопта која додирује све бочне ивице (тј. EA, EB, EC, ED, FA, FB, FC и FD) имају исти центар и да лопта која додирује бочне ивице има за 50% већу површину. Наћи однос $\dfrac{EF}{AB}$.

3. Перица стоји на једном од четири спрата зграде. У једном потезу он прелази на суседан спрат (спрат изнад или спрат испод, ако такав постоји). На колико начина Перица може да направи n потеза, где је n задат ненегативан цео број, ако може почети на било ком спрату а мора завршити на последњем?

4. Дата су два проста броја p и q који задовољавају услов $p < q < 2p$. Доказати да постоје два узастопна природна броја таква да је највећи прост делилац једног од њих једнак p, а највећи прост делилац другог једнак q.

5. У јединичном кругу Γ је дато n дужи укупне дужине $2\sqrt{n}$. Доказати да постоји кружница концентрична с кругом Γ која сече бар две дате дужи.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Први разред – Б категорија

1. Мерни бројеви углова троугла, изражени у степенима, представљају три проста броја. Наћи све могуће вредности за углове тог троугла.

2. Свака карта с једне стране има број, а с друге стране има слово (две карте које с једне стране имају исто слово не морају нужно с друге стране имати исти број, и обратно). На столу стоје карте које на видљивој страни имају:

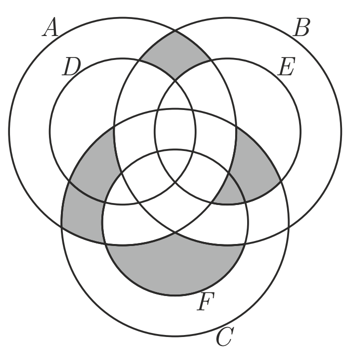
М, А, Т, Е, М, А, Т, И, К, А, 2, 0, 1, 8.

Влада тврди следеће: „Ако је на карти самогласник, онда је с друге стране паран број“. Миљан жели да провери Владино тврђење. Колико најмање карата (и које) треба да окрене да би утврдио тачност тврђења?

3. Да ли постоје узастопни природни бројеви a, b, c и d такви да важи

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{2018}{1301} \quad ?$$

4. На слици је дат Венов дијаграм за шест скупова A, B, C, D, E и F, при чему важи $D \subseteq A$, $E \subseteq B$ и $F \subseteq C$. Написати формулу за скуп који одговара осенченој области.



5. Свако слово у речи *МАШТОВИТ* представља једну цифру из скупа $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Различита слова представљају различите цифре. Број *МАШТОВИТ* је непаран и дељив са 3, а сви сугласници представљају цифре исте парности. Колико има таквих бројева?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Други разред – Б категорија

1. Одредити колико има скупова X који задовољавају оба следећа услова:

- $X \setminus \{1,2,3,4,5\} = \{6,7,8\}$;
- $X \cup \{4,5,6,7,8,9,10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

2. Ако је полином
$$x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$$
дељив полиномом
$$x^2 + 2ax + b,$$
онда је први полином потпун куб, а други потпун квадрат. Доказати.

3. У правоуглом трапезу дужина средње линије је 43. Краћа дијагонала тог трапеза је истовремено симетрала тупог угла тог трапеза, и њена дужина износи 60. Одредити дужине свих страница тог трапеза.

4. Наћи све просте бројеве p такве да су и бројеви $4p^2+1$ и $6p^2+1$ прости.

5. У скупу реалних бројева решити неједначину:
$$2|x-2| - \left|\frac{3}{|x-3|} - 1\right| \geqslant 1.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Трећи разред – Б категорија

1. Наћи све просте бројеве p, q, r и s такве да важи

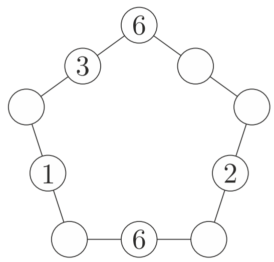
$$6p + 7pq + 8pqr + 9pqrs = 2018.$$

2. Дати су бројеви $a_1 = \log_2(3^x - 1)$, $a_2 = \log_4(9^x - 3^{x+1} + 2)$ и $a_3 = \log_2(3 - 3^x)$.

a) Одредити све реалне вредности x за које су сва 3 броја a_1, a_2 и a_3 дефинисана.

b) Одредити све реалне вредности x за које важи $a_1 + a_3 = 2a_2$.

3. Марко је уписао 5 бројева у 5 кружића на слици.



Марко жели да упише бројеве природне бројеве мање од 100 у остале кружиће, а да при томе збир 3 броја дуж сваке странице петоугла буде исти. На колико различитих начина он може то да уради?

4. Анђелија уписује редом слова С,Р,Б,И,Ј,А у поља таблице:

(по једно слово у свако поље). Прво слово може да упише у било које поље, а свако следеће слово може да упише само у поље суседно пољу у које је написала претходно слово (поља су суседна ако имају бар једну заједничку тачку). На колико различитих начина она може да упише слова у таблицу?

5. Ивице тетраедра $ABCD$ имају дужине 7, 13, 18, 27, 36 и 41 (у неком поретку). Ако је AB дужине 41, одредити дужину ивице CD.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Четврти разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$(x-7)^3 + (x+3)^3 = 278(x-2).$$

2. У зависности од ненегативног параметра a одредити граничну вредност:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{a + 2018^x}{2} \right)^{\frac{2018}{x}}.$$

3. Колико има петоцифрених природних бројева који имају тачно две парне цифре?

4. Основа пирамиде је правоугли троугао коме је један од оштрих углова $60°$. Бочне ивице имају дужину 2018 и свака од њих заклапа угао од $45°$ с равни основе. Наћи површину и запремину те пирамиде.

5. За природне бројеве m и n, $m < n$, важи

$$\left(\frac{m}{n} \right)^3 = \overline{0{,}xyzxyzxyz\ldots}$$

где су x, y и z неке цифре (не нужно различите), и блок $\overline{xyz}$ се периодично понавља бесконачно много пута. Одредити све могуће вредности за $\frac{m}{n}$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.